Cycle 8 – Étude de l'équilibre d'un système complexe grâce au Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

1. Enoncé (programme de spé) du PFD

Il existe au moins un référentiel (repère et chronologie), appelé référentiel galiléen et noté R_g, tel que pour tout système matériel E, le torseur associé aux actions mécaniques extérieures appliquées à E, noté $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}_A$ soit égal au torseur dynamique de E dans son mouvement par rapport à R_g, noté $\{\mathcal{D}(E/R_g)\}_A$:

$$\boxed{\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}_A = \{\mathcal{D}(E/R_g)\}_A}$$

Remarque : un repère galiléen est donc un repère pour lequel le principe fondamental de la dynamique est vrai.

Torseur dynamique

Définition : on appelle torseur dynamique, au point A, du système matériel E en mouvement par rapport au repère R, le torseur noté $\{\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{E}/\boldsymbol{R_g})\}_A$ tel que :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(E/R) \\ \vec{\delta}(A, E/R) \end{Bmatrix}_A$$

- le vecteur $\overrightarrow{R_d}(E/R)$ est ***la résultante dynamique*** du système matériel E en mouvement par rapport au repère R ;
- le vecteur $\vec{\delta}(A, E/R)$ est ***le moment dynamique*** du système matériel E en mouvement par rapport au repère R exprimé au point A.

Ces deux vecteurs seront définis dans le cours de seconde année, mais on peut cependant anticiper sur un cas particulier déjà connu : lorsque E est un point matériel M de masse m, on aura :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(E/R) \\ \vec{\delta}(A, E/R) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} m\vec{\Gamma}(M \in E/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

2. Conséquences

2.1 Théorème des actions réciproques

Enoncé : Si un système matériel E_1 exerce sur un système matériel E_2 un torseur d'actions mécaniques $\{\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{E_1} \rightarrow \boldsymbol{E_2})\}_A$, alors le système matériel E_2 exerce sur le système matériel E_1 un torseur d'actions mécaniques $\{\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{E_2} \rightarrow \boldsymbol{E_1})\}_A$ tel que :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\}_A = -\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}_A}$$

Démonstration :

- On isole le solide E_1 et on fait le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) exercées sur ce solide :
  - Action de E_2 sur E_1 : $\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}$;
  - Action de tout ce qui est extérieur à E_1 et E_2 sur E_1 : $\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_1)\}$.

D'où, par application du PFD : $\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} = \{\mathcal{D}(E_1/R_g)\}$ (équation 1)

- On procède de même en isolant le solide E_2, le BAME nous donne :
  - Action de E_1 sur E_2 : $\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\}$;
  - Action de tout ce qui est extérieur à E_1 et E_2 sur E_2 : $\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_2)\}$.

D'où, par application du PFD : $\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = \{\mathcal{D}(E_2/R_g)\}$ (équation 2)

- Enfin, on termine en isolant l'ensemble E_1 et E_2 (soit $E_1 \cup E_2$), le BAME est le suivant :
  - Action de tout ce qui est extérieur à E_1 et E_2 sur E_1 et E_2 : $\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_1 \cup E_2)\}$

D'où, par application du PFD : $\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_1 \cup E_2)\} = \{\mathcal{D}(E_1 \cup E_2/R_g)\}$ (équation 3)

On écrit : (équation 3)-(équation 2)-(équation 1)

$$\begin{aligned}\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_1 \cup E_2)\} - (\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\}) - (\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}) \\ = \{\mathcal{D}(E_1 \cup E_2/R_g)\} - \{\mathcal{D}(E_2/R_g)\} - \{\mathcal{D}(E_1/R_g)\}\end{aligned}$$

Or : $\{\mathcal{D}(E_1 \cup E_2/R_g)\} = \{\mathcal{D}(E_1/R_g)\} + \{\mathcal{D}(E_2/R_g)\}$

Et : $\{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_1 \cup E_2)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_1)\} + \{\mathcal{T}(\overline{E_1 \cup E_2} \rightarrow E_2)\}$

Soit : $-\{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} - \{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2)\} = -\{\mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1)\}$

Attention, tout ceci n'est bien évidemment vrai que si tous les torseurs sont écrits au même point !

2.2 Torseur des actions intérieures à un système matériel

<u>Enoncé :</u> Le torseur des actions intérieures à un système matériel E constitué de n solides S_i est le torseur nul.

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{int}(E)\}_A = \{0\}}$$

Ce résultat se démontre d'une façon similaire au théorème des actions réciproques, en isolant successivement tous les solides constituant le système matériel et en sommant les relations obtenues par application du Principe Fondamental de la Dynamique, puis en isolant le système matériel complet E.

3. Cas particulier de la statique *(programme de sup)*

3.1 Enoncé du Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Il existe au moins un référentiel (repère et chronologie), appelé référentiel galiléen et noté R_g, tel que pour tout système matériel E en équilibre par rapport à ce repère, le torseur associé aux actions mécaniques extérieures appliquées à E, noté $\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}_A$ soit nul :

$$\boxed{\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}_A = \{0\}_A}$$

<u>Remarques :</u>

- De même, pour tout sous-ensemble matériel e de l'ensemble matériel E, en équilibre par rapport à R_g, le torseur associé aux actions mécaniques de l'extérieur sur e est nul, $\{\mathcal{T}(\bar{e} \rightarrow e)\}_A = \{0\}_A$;
- La réciproque n'est pas vraie. On peut avoir $\{\mathcal{T}(\bar{e} \rightarrow e)\}_A = \{0\}_A$ sans que e ne soit nécessairement en équilibre ;
- On observe que le principe fondamental de la statique est un cas particulier du principe fondamental de la dynamique, qui correspond aux cas pour lesquels le torseur dynamique est nul.

3.2 Théorèmes généraux de la statique

A partir du Principe Fondamental de la Statique, on a : $\begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \to E) \\ \vec{M}(A, \bar{E} \to E) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$.

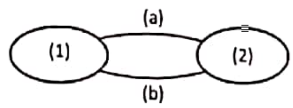
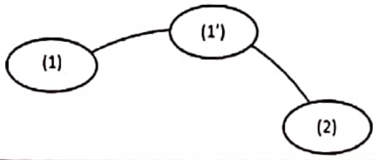
Cette égalité torsorielle peut se traduire sous la forme de deux égalités vectorielles, appelées ***Théorème de la Résultante Statique*** et ***Théorème du Moment Statique*** et exprimées de la façon suivante.

Théorème de la résultante statique (TRS) : $\vec{R}(\bar{E} \to E) = \vec{0}$

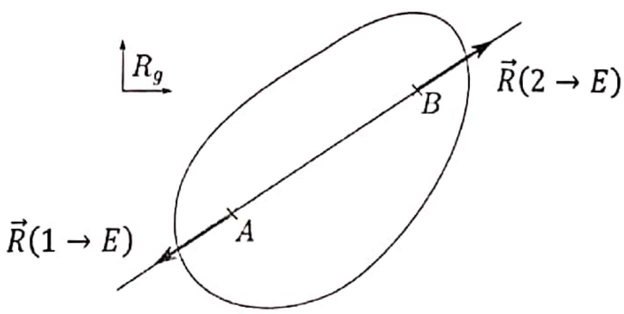
Théorème du moment statique au point A (TMS) : $\vec{M}(A, \bar{E} \to E) = \vec{0}$

3.3 Liaisons statiquement équivalentes

Nous avons vu lors du cours de cinématique que lorsqu'un mécanisme est constitué de plusieurs liaisons en série ou en parallèle, il peut être judicieux de déterminer une liaison équivalente. Une méthode a été vue pour déterminer la liaison cinématiquement équivalente à deux (ou plus) liaisons en série ou en parallèle.

Liaisons en parallèle	Liaisons en série
	
 Le torseur statique de la liaison statiquement équivalente doit être à la somme des torseurs des deux liaisons (a) et (b) : $\{\mathcal{T}(1 \to 2)_{eq}\} = \{\mathcal{T}(1 \to 2)_{(a)}\} + \{\mathcal{T}(1 \to 2)_{(b)}\}$	 Le torseur statique de la liaison statiquement équivalente doit être compatible avec les torseurs des deux liaisons : $\{\mathcal{T}(1 \to 2)_{eq}\} = \{\mathcal{T}(1 \to 1')\} = \{\mathcal{T}(1' \to 2)\}$

3.4 Cas particulier d'un système matériel soumis à 2 glisseurs



Soit un système matériel E, soumis à 2 actions mécaniques représentées par les torseurs de type glisseur :

$$\{\mathcal{T}(1 \to E)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \to E) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}(2 \to E)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \to E) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

L'équilibre de E implique : $\{\mathcal{T}(\bar{E} \to E)\}_A = \{\mathcal{T}(1 \to E)\}_A + \{\mathcal{T}(2 \to E)\}_A = \{0\}$

D'après le théorème de la résultante : $\vec{R}(1 \to E) + \vec{R}(2 \to E) = \vec{0}$

D'après le théorème du moment : $\vec{M}(A, 1 \to E) + \vec{M}(A, 2 \to E) = \vec{0}$

Or $\vec{M}(A, 1 \rightarrow E) = \vec{0}$, on obtient donc : $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}(2 \rightarrow E) = \vec{0}$, ou encore : $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{R}(2 \rightarrow E)$.

Conclusions :

$$\vec{R}(1 \rightarrow E) = -\vec{R}(2 \rightarrow E)$$

$\vec{R}(1 \rightarrow E)$ et $\vec{R}(2 \rightarrow E)$ sont selon la direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Traduction :

Si un solide à l'équilibre est soumis à deux glisseurs en A et B, alors celles-ci sont de même directions, de même normes et de sens opposé. De plus, la direction est selon la droite (AB), passant par les points d'application des deux résultantes.

Ces informations permettent de réduire rapidement le nombre d'inconnues dans un torseur d'action mécanique. Il est donc particulièrement avantageux, lors de la mise en place d'une stratégie d'isolement, de repérer les solides ou ensembles de solides soumis à deux glisseurs.

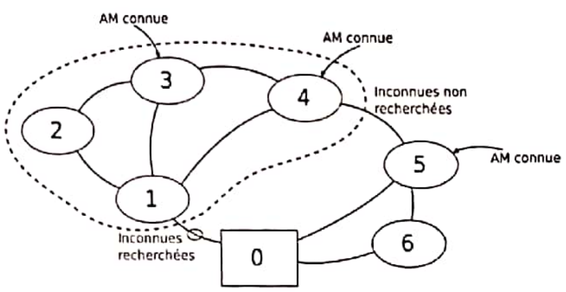
3.5 Choix d'une *stratégie de résolution intelligente* d'un problème de statique

Lors de la résolution d'un problème de statique, il est possible d'isoler successivement chacun des solides (sauf le bâti) et de lui appliquer le Principe Fondamental de la Statique. Dans un système contenant n_P solides (hors bati), il est donc possible d'écrire n_P équations torsorielles qui donnent, par projection, $(6 \times n_P)$ équations scalaires.

Remarque : pour des raisons de stratégie, il est possible d'isoler un sous-ensemble contenant plusieurs solides du système initial, mais les équations qui seront obtenues sont des combinaisons linéaires des équations obtenues par l'isolement de chacun des solides constituants le sous-système séparément.

Il est évidemment fortement déconseillé d'écrire systématiquement toutes les équations issues du PFS. Vous devez élaborer une stratégie de résolution en choisissant de façon intelligente les solides (ou ensembles de solides) à isoler et les équations à écrire (en précisant le vecteur de projection pour le TRS et le point d'expression et le vecteur de projection pour le TMS). Cette étape est la plus importante dans la résolution et nécessite beaucoup de pratique.

Stratégie :



1. Dresser un bilan des actions mécaniques données et des actions mécaniques recherchées ;
2. Déterminer un isolement coupant la liaison aux inconnues recherchées et coupant le moins de liaisons non recherchées possible pour éviter les inconnues ;
3. Choisir le point de réduction et les équations vectorielles ne sollicitant pas les inconnues non recherchées. Eviter de déplacer un torseur contenant beaucoup d'inconnues non recherchées ;
4. Choisir une base de projection permettant d'isoler les inconnues non recherchées ;
5. Ecrire le système d'équations. S'il ne peut être résolu, identifier les inconnues à rechercher et proposer un nouvel isolement intelligent.